线性代数与解析几何

主讲人 自动化钱2101 周品良

目 录

CONTENTS

01

Part

one

知识点回顾

经典题型讲解

行列式

定义：

n阶行列式，记作D_n

$D_n \leftarrow D_{n-1}$

1.$D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$

其中A_{ij}为代数余子式

$(-1)^{i+j} \times M_{ij}$

2.$D_n = \sum(-1)^t a_{1p_1} \times a_{2p_2} \times \dots \times a_{np_n}$

$p_1 p_2 \cdots p_n$

t为排列$a_{1p_1}a_{2p_2}\dots a_{np_n}$的逆序对个数

3 1 2

也就是所谓的对角线法则

求导：

行列式求导是逐行(列)求导后求和

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2+x \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & x+2 & 4-x \end{vmatrix} \quad f'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & x+2 & 4-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 2+x \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & x+2 & 4-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 2+x \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

行列式

性质：

1.转置相等 $|A| = |A^T|$

2.交换反号

3.行列式=0（元素为0、相等、成比例）

4.行列式的某一行(列)中所有的元素都乘同一个数k，等于用k乘行列式

5.把k乘第i行加到第j行(列)上，行列式不变

6.若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

a_1

1+2 3+4 5+6

$6 \longrightarrow 2, 3$

行列式

应用：

方程组解法1：

Cramer 法则：

条件—①$\det(A) \neq 0$

②方程个数=未知数个数

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

令$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$，

$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$\ldots$，$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}$

即$x_1 = \frac{D_1}{D}$，$x_2 = \frac{D_2}{D}$，$\ldots$ $x_n = \frac{D_n}{D}$

行列式按行(列)展开：

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = D$$

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad i \neq j$$

行列式

经典行列式模型：

上(下)三角形行列式

对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

范德蒙德行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

爪形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} = (a_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{a_i}) a_2 a_3 \dots a_n$$

和等行列式

$$D = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix} = (x + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix} = (x + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix}$$

行列式

经典题型：递推及数学归纳法思想

计算下列各行列式(D_k 为 k 阶行列式)：

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}$$，其中未写出的元素都是 0；

$a_n \quad b_n$

$c_n \quad d_n$

$a_{n-1} \quad b_{n-1}$

$c_{n-1} \quad d_{n-1}$

$D_{2n}=D_{2n-1}$

ans=$(ad-bc)^n$

行列式

经典题型：

定义的充分妙用

1 设A_{ij}是$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}$的$(i,j)$元的代数余子式，则$A_{13}+2A_{23}+A_{43}=$（ ）

(A) 20 (B) 12 (C) 1 (D) 0

$M_{13}+-\cdots M$

D

$17 = a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}+a_{43}A_{43}$

1 2 0 1

由行列式定义计算

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$中 x^4 和 x^3 的系数

2 7

2,4

行列式

经典题型：

经典行列式的使用及常见套路

$$\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$b^{n-1}\left(\sum a_i + b\right)$$

8项

求证:

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

行列式

经典题型：经典行列式的使用及常见套路

证明:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+d+c)$$

10. 求证：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$$

左边 $\xlongequal[\substack{r_3-ar_2 \\ r_2-ar_1}]{r_4-a^2r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}$

$\xlongequal[r_2-br_1]{r_3-b(b+a)r_2} (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & x & y \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ x & y \end{vmatrix}$

其中 $x = c(a+b+c)(c-b)$　$y = d(a+b+d)(d-b)$

故 $\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ x & y \end{vmatrix} = (c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & b & c & d & 0 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & 0 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & -1 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & b-a & c-a & d-a & 0 \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) & 0 \\ 0 & b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) & -1 \\ 0 & b^3(b-a) & c^3(c-a) & d^3(d-a) & a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ b & c & d & 0 \\ b^2 & c^2 & d^2 & -1 \\ b^3 & c^3 & d^3 & a \end{vmatrix}$$

矩阵

矩阵的运算：

矩阵加减：将对应元素的位置加在一起

矩阵数乘：每个位置上都乘α

矩阵乘法：$A_{m*s} * B_{s*n} = C_{m*n}\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}$

满足左列等于右行，且无交换律，但有结合律

方阵的幂：注意只有当A和B可交换的时候

才有$(AB)^k = A^k B^k, (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

矩阵转置：将矩阵行列互换得到的矩阵

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(AB)^T = B^T A^T$

方阵行列式：由n阶方针A的元素所构成的行列式

$|A^T| = |A|$

$|kA| = k^n |A|$

$|AB| = |A||B|$ A和B均为方阵

矩阵

矩阵的运算：

A^*A $|A|E$

伴随矩阵：行列式|A|各个元素的代数余子式所构成的矩阵转置

$|A||A^*| = |A|$

$$AA^* = |A|E$$

$$|A^*| = |A|^{n-1}, (A^*)^* = |A|^{n-2}A, (kA)^* = k^{n-1}A^*$$

$$(A^*)^T = (A^T)^* \quad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

$$(AB)^* = B^*A^*$$

矩阵求逆： 对于矩阵A，如果有一个~~n阶~~矩阵B，AB=E，则A是可逆的，B为A的逆矩阵，$B = A^{-1}$，逆矩阵唯一

1.若矩阵A可逆，则$|A| \neq 0$

2.若矩阵A可逆，则有$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$（逆矩阵求法1）

3.$|A| = 0$,A不可逆时A称**奇异矩阵**否则称**非奇异矩阵**

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$ 大前提条件 A,B**均可逆**

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

矩阵

矩阵的运算：

矩阵分块：将矩阵通过横纵的直线切分成几个子矩阵

在某些时候能够很有效地减少计算量或者方便表示

特别重视的是按列分块和按行分块

初等变换和初等矩阵：

初等行变换：1.交换第i行和第j行的位置

2.用非零数k乘矩阵的第i行

3.把矩阵第i行的k倍加到第j行上去

初等矩阵：对单位矩阵只做**一次**初等变换所得到的矩阵

行变换左乘初等矩阵，列变换右乘初等矩阵

阶梯形矩阵和行最简形矩阵：

任意非零矩阵A都可通过有限次初等**行**变换变成阶梯形矩阵

矩阵

矩阵的秩：

定义：矩阵A中任取k行k列组成的k阶行列式为矩阵的k阶子式
若存在一个不等于0的r阶子式，r+1阶子式全是0
则A的秩序R(A)=r

可逆矩阵又称满秩矩阵，不可逆矩阵又称降秩矩阵

性质：1.$R(A_{m*n}) \leq min(m,n)$

2.$R(A^T) = R(A)$

3.若$A \cong B$,则$R(A) = R(B)$,即$R(PAQ) = R(A)$,P,Q均可逆
特别的，若A的行阶梯形矩阵有t个非零行,R(A)=t

4.$max(R(A),R(B)) \leq R(A,B) \leq R(A)+R(B)$

5.$R(A+B) \leq R(A)+R(B)$

6.$R(AB) \leq min(R(A),R(B))$

7.若$A_{m*n}B_{n*l} = 0$,$R(A)+R(B) \leq n$

矩阵

矩阵的应用：

方程组解法2：$Ax = b$,故有$x = A^{-1}b$

逆矩阵的求法2：$(A, E) \cong A^{-1}(A, E) = (E, A^{-1})$

方程组解法3：$(A, b) \cong A^{-1}(A, b) = (E, A^{-1}b)$

注意此时只能用行变换

GH分解：设$R(A_{m*n}) = r$,存在列满秩G_{m*r}和行满秩H_{r*n}使得A=GH

基本结论：

1.若A,B均为非零矩阵,若$AB = 0$，则$|A| = |B| = 0$

$A = \begin{pmatrix} I_n & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$

2.$A = 0 \leftrightarrow A^TA = 0$

3.矩阵的消去律:AB=C,若A为列满秩矩阵，则R(B)=R(C)

4. 若A为n阶$(n \geq 2)$矩阵，A^*为A的伴随矩阵，则有

$$R(A^*) = \begin{cases} n & R(A) = n \\ 1 & R(A) = n-1 \\ 0 & R(A) \leq n-2 \end{cases}$$

$R(AA^*) = R(|A|E) = n \leq R(A^*) = n$

$AA^* = |A|E = 0 \Rightarrow R(A) + R(A^*) \leq n$

≥ 1

矩阵

经典题型：

1.证明某个矩阵是对称矩阵 只需证明$A^T = A$

证明 $H = I - 2xx^T$ 为对称矩阵

$H^T = I^T - 2(xx^T)^T = I - 2xx^T = H$

2.证明A是可逆的 且$A^{-1} = B$ 只需证明AB=E

设 $A^k = 0$，证明 $E - A$可逆，$(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}$

解：有$(E-A)(E + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}) = E + A + A^2 + \ldots + A^{k-1} - A - A^2 - \ldots - A^k = E$

$A^2 - A + E = 0$

3.求A^n,一般来说给出$A = \alpha\beta^T$ 结合律的妙用

8. 设 $\alpha = (1,3,-1)^T$，$\beta = (2,1,-1)^T$，矩阵 $A = \alpha\beta^T$，n 为正整数，$A^n =$ __________.

$\alpha(\beta^T\alpha)(\beta^T\alpha)\cdots\beta^T$

$3^{n-1}\alpha\beta^T$

4.给一个表达式求X

13. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，$A^{-1}XA = 2A + XA$，求 X.

$X = 2A + AX$

$= 2(E-A)^{-1}A$

矩阵

经典题型：

5.解方程题，怎么好算怎么解
解完了如果时间充裕一定要带回去验证

6.求行列式，逆矩阵题,了解行列式，逆矩阵基本性质

7.给定一个已知矩阵求秩题，化阶梯形矩阵计算即可

8.表达式求秩题，一般利用好秩的性质做夹逼即可

设 A为 n阶矩阵，证明 $R(A+E)+R(A-E)\geq n$

因为 $(A+E)+(E-A)=2E$，故$R(2E)=n=R((A+E)+(E-A))\leq R(A+E)+R(E-A)$

设 A为 n阶矩阵，满足$A^2-2A-3E=0$，证明 $R(A+E)+R(A-3E)=n$

因为 $(A+E)+(3E-A)=4E$，故$R(4E)=n=R((A+E)+(3E-A))\leq R(A+E)+R(3E-A)$

又$(A+E)(3E-A)=0$，故$R(A+E)+R(3E-A)\leq n$

综上可得 $R(A+E)+R(3E-A)=n$

矩阵

经典题型：

$Ax=b$　　$\overset{n\times n}{R(A)} \le R(A,b) \le n$

9. 关于方程组解的存在性问题
转化为求系数矩阵和增广矩阵的秩

$BA=0$　　$A^TB^T=0$

设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$，矩阵 $B_{4*3}\neq 0$ 且满足 $BA=0$，求常数 t 的值

$B\neq 0$

$|A|=0$

ans=-3

10. 由B=PAQ，求出变换矩阵P，Q，一般出选择题

$A \longrightarrow B$

P　　　　Q

几何向量及其应用

几何向量：

两个向量a与b共线的充要条件：

1.存在不全为0的常数k1,k2，使得$k1\vec{a}+k2\vec{b}=0$

2.坐标对应成比例

任意一个平面向量a可以被两个不共线的向量e1,e2唯一表示

三个向量a与b与c共线的充要条件：

1.存在不全为0的常数k1,k2,k3 使得k1a+k2b+k3c=0

2.混合积为0

任意一个平面向量a可以被三个不共面的向量e1,e2,e3唯一表示

设a,b,c为空间内三点A,B,C的向径
则C落在线段AB上的充分条件是$c = ka + (1-k)b$

几何向量及其应用

几何向量：

方向角和方向向量：

方向角：向量a=xi+yj+zk分别与i,j,k的夹角

方向余弦：方向角的余弦值

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{x}{||a||}, \frac{y}{||a||}, \frac{z}{||a||}\right)$$

数量积(内积)：结果为标量

$$a \cdot b = ||a||\ ||b||\ \cos\theta = ||a||(b)_a = ||b||(a)_b$$

求向量的模：$||a|| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$

求两个非零向量的夹角：$\cos(a, b) = \dfrac{a \cdot b}{||a||\ ||b||}$

几何向量及其应用

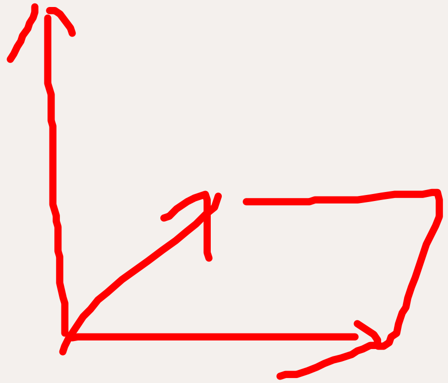
几何向量：

向量积分(外积)：结果为向量

大小：$||a \times b|| = ||a||\ ||b||\ sin\theta$

方向：右手定则

坐标形式：$c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$



几何意义:绝对值等于构成的平行四边形的面积

应用:**求与两个向量都垂直的另一个向量**，判断向量共线

基本性质：无交换律，但有$a \times b = -b \times a$

几何向量及其应用

几何向量：

混合积：结果为标量

大小：$[a, b, c] = (a \times b) \cdot c$

坐标形式：$c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

几何意义:绝对值等于平行六面体的体积

应用:判断向量共面 $[a, b, c] = 0$

基本性质:

$[a, b, c] = [b, c, a] = [c, a, b]$

$[a, b, c] = -[b, a, c]$ 即任意交换两个位置，变号

$[a, a, b] = 0$ 即存在两个相同的必为0

几何向量及其应用

平面方程： $\vec{n}$: 向 $\vec{n}=(A,B,C)$

1.点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

2.一般式：$Ax+By+Cz=D$

3.截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ a, b, c 斜了

4.参数式：$\vec{r}=\overrightarrow{r_0}+s\vec{a}+t\vec{b}$

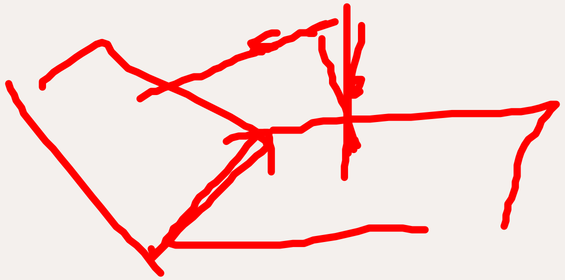
平面位置关系：

1.π_1和π_2相交 $\leftrightarrow$ n_1和n_2不平行

2.π_1和π_2平行而不重合

3.π_1和π_2重合

几何向量及其应用



直线方程：

1.一般式：$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{cases}$

$(l, m, n) = (a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2)$

2.对称式：$\dfrac{x-x_0}{l} + \dfrac{y-y_0}{m} + \dfrac{z-z_0}{n}$

3.参数式：$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t\vec{a}$

直线位置关系：

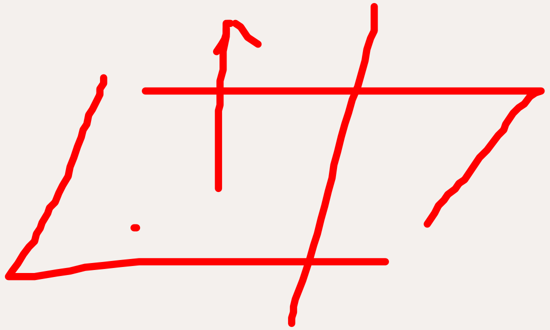
1.L_1和L_2异面 $\leftrightarrow$ $\overrightarrow{P_1P_2}, n_1, n_2$不共面

2.L_1和L_2相交

3.L_1和L_2平行

4.L_1和L_2重合

几何向量及其应用



直线和平面关系：

1.相交，此时$Al+Bm+Cn\neq 0$

2.平行，此时$Al+Bm+Cn=0$ 且 (x_0,y_0,z_0)不在直线上

3.重合，此时$Al+Bm+Cn=0$ 且 (x_0,y_0,z_0)在直线上

平面束：

求过平面π_1 : $2x+5y-3z+4$和平面π_2 : $-x-3y+z-1=0$的交线L，

且与平面π_2垂直的平面方程

平面束 $2x-5y-3z+4+t(-x-3y+z-1)=0$代表过$L$但不包括$\pi_2$ 的所有平面

即$(2-t)x+(5-3t)y+(-3+t)z+4-t=0$

由平面垂直的条件可得，$(2-t,5-3t,-3+t)\cdot(-1,-3,1)=0$

可得$t=\frac{20}{11}$，代回可得 $2x-5y-13z+24=0$

几何向量及其应用

经典题型：

1.叉积的性质

设$(a\times b)\cdot c=2$，求$[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a)$

$[a, a. b] = 0$

解:拆开可得 $[a\times b+a\times c+b\times b+b\times c]\cdot(c+a)=[a,b,c]+[b,c,a]=4$

2.几何意义

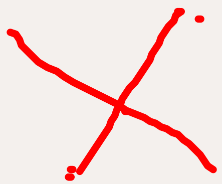
证明：以$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$为顶点的三角形的面积等于

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

3.点与面，点与线，线与线的距离 以及各种夹角计算

分析相对关系套公式即可

几何向量及其应用



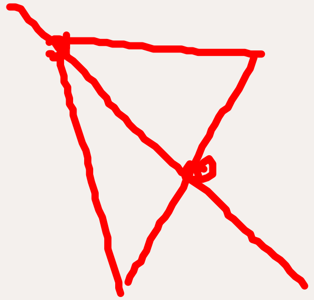
经典题型：

4.点对线(面)的对称关系，(1)中点在线(面)上 (2)连线垂直于线(面)

5.根据条件求线方程　　*主要考点

(l, m, n)

过已知点P，与线(面)的垂直(平行)的一些条件
与线平行 对应方向向量成比例



与线垂直 方向向量内积为0

与线相交 所求线一定在P与该线组成的平面内(必要条件)

5.根据条件求面方程　　*主要考点

只需要根据条件求出法向量和过的一个点

综合题

综合题：

$$\begin{vmatrix} a_1-a_3 & b_1-b_3 & c_1-c_3 \\ a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \end{vmatrix} = 0$$

1. 设矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 是满秩的，则直线 $\frac{x-a_3}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}$

   (A) 相交于一点　　(B) 重合　　(C) 平行但不重合　　(D) 异面

   (A)

2. 证明：$|A^T| = |A|$

   如果 A 是 n 阶矩阵，且满足 $AA^T = I$，$|A| = -1$，则 $|I+A| = 0$

   $|I+A||A^T| = |A^T + AA^T| = |A^T + I| = |(A^T+I)^T|$

3. 16 设 A、B 均为 n 阶方阵，$|A|=5, |B|=3, |A^{-1}+B|=3$，求 $|B^{-1}+A|$.

   5

4. 5.设矩阵 $A=(a_{ij})_{3*3}$，满足 $A^* = A^T$，若 a_{11}, a_{12}, a_{13} 是三个相等的整数，求 a_{11}

   $AA^* = AA^T = |A|E$　　$|A| = 0$ 或 ± 1

   $|A|^2 = |A|^3$

   $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |A| = 0$ 或 1

   0 或 $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

02

Part

真题讲解

一、单项选择题（请将正确选项填写在后面的括号中，每小题 3 分，共 30 分）

1 设A_{ij}是$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}$的$(i,j)$元的代数余子式，则$A_{13}+2A_{23}+A_{43}=$ (　　)

(A) 20　　(B) 12　　(C) 1　　(D) 0

2 设A为 3 阶方阵，$|A|=3$，则$|-2A|=$ $(-2)^3|A|$ (C)

(A) -6　　(B) 6　　(C) -24　　(D) 24

3 设A,B为n阶方阵，则下列等式成立的是 (B)

(A) $AB=BA$　　(B) $|AB|=|BA|$

(C) $|A+B|=|A|+|B|$　　(D) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

4 设A为 3 阶方阵，A^*为A的伴随矩阵，$|A|=2$，则$|A^*|=$ $|A|^2$ (B)

(A) 2　　(B) 4　　(C) 8　　(D) 16

5 设同阶方阵A与B等价，则有 (　　) C

(A) $|A|=|B|$　　(B) $|A|\neq|B|$　　(C) $r(A)=r(B)$　　(D) $r(A)\neq r(B)$

D

C

B

B

C

$A^* = |A|A^{-1}$

6 设 A 为 n 阶可逆矩阵，则 (A)

(A) $(A^{-1})^* = |A|^{-1}A$　　(B) $(A^{-1})^* = |A|A$

(C) $(A^{-1})^* = |A|^{-1}A^{-1}$　　(D) $(A^{-1})^* = |A|A^{-1}$

7 设 A 为 n 阶方阵，B 为 m 阶方阵，$C = \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$，则 $|C| =$ (D)

$\begin{pmatrix} D & O \\ O & R \end{pmatrix}$

(A) $|A|\cdot|B|$　　(B) $-|A|\cdot|B|$

(C) $(-1)^{m+n}|A|\cdot|B|$　　(D) $(-1)^{mn}|A|\cdot|B|$

8 设 A,B,C 均为 n 阶方阵，且 $ABC = I$（单位阵），则下式未必成立的是 (C)

(A) $BCA = I$　(B) $CAB = I$　(C) $ACB = I$　(D) $C^TB^TA^T = I$

$AA^{-1} = E$

9 设 $1\times n$ 矩阵 $\alpha = (\frac{1}{2}, 0, 0, \cdots, 0, \frac{1}{2})$，$A = I - \alpha^T\alpha$, $B = I + 2\alpha^T\alpha$，则 (D)

$AB = E$

(A) A,B都不可逆　　(B) A可逆但B不可逆

(C) A不可逆而B可逆　　(D) A,B都可逆且互为逆矩阵

10 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$，若有下三角可逆矩阵 P 与上三角可逆矩阵 Q 使 PAQ 为对角阵，则 P,Q 可分别取为 (C)

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A

D

C

D

C

二填空题（每题 3 分，共 15 分）

11 方程 $f(x)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x \\ a_1 & a_2 & a_3+x & a_4 \\ a_1 & a_2+x & a_3 & a_4 \\ a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}=0$ 的根为________

12 点 $M(1,2,3)$ 到平面 $x-2y+2z+3=0$ 的距离为________

13 已知向量 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}=(1,2,-2)$ 平行，且 $\vec{b}$ 与 z 轴正向的夹角为锐角，则 $\vec{b}$ 的方向余弦为________ $(-1,-2,2)$

14 设矩阵 X 满足矩阵方程 $AX=B$，其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

则 $X=$________

15 设矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$，A_{ij} 为 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，$a_{ij}=A_{ij}$，$a_{11}=2a_{12}=3a_{13}$，已知 $a_{11}>0$，则 $a_{11}=$________ $\frac{6}{7}$

$A^* = A^T$

$|A| = 1$

二、填空题（每小题 3 分）

11. $0, -\sum_{i=1}^{4} a_i$； **12.** 2 **13.** $-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}$ **14.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ **15.** $\frac{6}{7}$

三 解答题(第 16-20 题，每题 9 分；第 21 题，10 分)

16 设 A、B 均为 n 阶方阵，$|A|=5,|B|=3,|A^{-1}+B|=3$,求$|B^{-1}+A|$.

三、解答题

16 解 $B^{-1}+A=B^{-1}(I+BA)=B^{-1}(A^{-1}+B)A$ ………5 分

$|B^{-1}+A|=|B^{-1}|\cdot|A^{-1}+B|\cdot|A|$ (7 分) $=|B|^{-1}\cdot|A^{-1}+B|\cdot|A|=5$ ………9 分

17 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2+3a & 2+3b & 2+3c & 2+3d \\ 4a+5a^2 & 4b+5b^2 & 4c+5c^2 & 4d+5d^2 \\ 6a^2+7a^3 & 6b^2+7b^3 & 6c^2+7c^3 & 6d^2+7d^3 \end{vmatrix}$.

17 解

$$D \xlongequal{r_{12}(-2),\, r_{23}(-\frac{4}{3}),\, r_{34}(-\frac{6}{5})} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c & 3d \\ 5a^2 & 5b^2 & 5c^2 & 5d^2 \\ 7a^3 & 7b^3 & 7c^3 & 7d^3 \end{vmatrix}$$ ……… 4 分

18 求过直线 $L\begin{cases}2x-z=0 \\ x+y-z+5=0\end{cases}$ 且垂直于平面 $\pi_0: 7x-y+4z=4$ 的平面方程.

n_1 n_2

$n \cdot l = 0$

$l = n_1 \times n_2$

18 解 设过直线的平面束为： $x+y-z+5+\lambda(2x-z)=0$， ……5 分

$(7,-1,4)=0$

即 $(1+2\lambda)x+y+(-1-\lambda)z+5=0$，

又平面束与已知平面的法向量垂直，因此有 $7(1+2\lambda)-1-4(1+\lambda)=0$ ……7 分

解之得 $\lambda=-\frac{1}{5}$，因此，所求平面的方程为 $3x+5y-4z+25=0$。 ……9 分

19 求过点 $P_0(-3,5,9)$ 且与直线 $L_1\begin{cases} y=3x+5 \\ z=2x-3 \end{cases}$ 及 $L_2\begin{cases} y=4x-7 \\ z=5x+10 \end{cases}$ 都相交的直线 L 的方程.

19 解法 1 设过点 $P_0(-3,5,9)$ 及直线 L_1 的平面为 π_1，法向量为 $\vec{n}_1$，过点 $P_0(-3,5,9)$ 及直线 L_2 的平面为 π_2，法向量为 $\vec{n}_2$.

化 L_1 为对称式方程 $L_1: x=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z+3}{2}$，知 L_1 过点 $P_1(0,5,-3)$，方向向量为 $\vec{a}_1=(1,3,2)$. 则 ......3 分

$\vec{n}_1=\vec{a}_1\times\overrightarrow{P_1P_0}=(36,-18,9)//(4,-2,1)$，

所以平面 π_1 的方程为：$4(x+3)-2(y-5)+(z-9)=0$，

即 $4x-2y+z+13=0$. ......5 分

化 L_2 为对称式方程 $L_2: x=\dfrac{y+7}{4}=\dfrac{z-10}{5}$，知 L_2 过点 $P_2(0,-7,10)$，方向向量为 $\vec{a}_2=(1,4,5)$.

则 $\vec{n}_2=\vec{a}_2\times\overrightarrow{P_2P_0}=(-64,-14,24)//(32,7,-12)$，所以平面 π_2 的方程为

$32(x+3)+7(y-5)-12(z-9)=0$， 即 $32x+7y-12z+169=0$ ....7 分

故所求直线的方程为：$\begin{cases} 4x-2y+z+13=0, \\ 32x+7y-12z+169=0. \end{cases}$ .... 9 分

解法 2 分别化 L_1、L_2 为对称式方程 $L_1: x=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z+3}{2}$，$L_2: x=\dfrac{y+7}{4}=\dfrac{z-10}{5}$.知 L_1 过点 $P_1(0,5,-3)$，方向向量为 $\vec{a}_1=(1,3,2)$；L_2 过点 $P_2(0,-7,10)$，方向向量为 $\vec{a}_2=(1,4,5)$.

设所求直线的方向向量为 $\vec{a}=(l,m,n)$，以题意有 $[\vec{a},\vec{a}_1,\overrightarrow{P_1P_0}]=0$, $[\vec{a},\vec{a}_2,\overrightarrow{P_2P_0}]=0$, ... 5 分

即 $\begin{cases} 36l-18m+9n=0 \\ -64l-14m+24n=0 \end{cases}$ 于是取 $\vec{a}=(17,80,92)$ ......7 分

所求直线的方程为 $\dfrac{x+3}{17}=\dfrac{y-5}{80}=\dfrac{z-9}{92}$. ...... 9 分

解法3 ...

20 设 B 是 $m\times n$ 矩阵，且 BB^{T} 可逆，$A=I-B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B$.

（1） 证明 A 是对称矩阵，且 $A^2=A$;（2） A 是否可逆，为什么？

$A^T=A$ $\quad$ $A^2=A$

$A^2=A$

$A=I$

20. 解（1） $A^{\mathrm{T}}=I^{\mathrm{T}}-[B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B]^{\mathrm{T}}=I-B^{\mathrm{T}}[(BB^{\mathrm{T}})^{-1}]^{\mathrm{T}}B=I-B^{\mathrm{T}}[(BB^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}]^{-1}B$

$=I-B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B=A$，所以 A 是对称矩阵。 ...... 3 分

$A^2=[I-B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B][I-B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B]$

$=I-2B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B+B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}BB^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B=I-B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B=A$ ...... 5 分

（2） A 是不可逆。 ......6 分

如果 A 可逆，由（1）知 $A^2=A$，则 $AAA^{-1}=AA^{-1}$，即 $A=I$，于是 $B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B=O$ 从而 $BB^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B=BO=O$，得 $B=O$，进而 $BB^{\mathrm{T}}=O$ 与 BB^{T} 可逆矛盾。.........9 分

$AA^{-1}=O$

$\Leftrightarrow A=O$

21 设有 $m\times n$ 矩阵 A， $r(A)$ 表示 A 的秩.

(1) 证明：$r(A)=r$ 的充分必要条件是存在 $m\times r$ 的列满秩矩阵 G 和 $r\times n$ 的行满秩矩阵 H，使 $A=GH$.

(2) 证明：若 $r(A)=r$，则 A 可表示为 r 个秩为 1 的矩阵之和。

$A=GH$

21. 证（1）若 $r(A)=r$，则存在可逆矩阵 P,Q，使得 $PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ ......1 分

即 $$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}(I_r \quad O)$$ ......2 分

所以 $A=P^{-1}\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}(I_r \quad O)Q^{-1}=GH$

其中 $G=P^{-1}\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}, H=(I_r \quad O)Q^{-1}$，$r(G)=r\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}=r, r(H)=r(I_r \quad O)=r$. ......3 分

反之， 因为 G 列满秩，存在可逆矩阵 $\tilde{P}$，使得 $\tilde{P}G=\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}$ ......4 分

而 H 行满秩，存在可逆矩阵 $\tilde{Q}$，使得 $H\tilde{Q}=(I_r\ O)$ ......5 分

于是 $\tilde{P}A\tilde{Q}=\tilde{P}GH\tilde{Q}=\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}(I_r\ O)=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，所以 $r(A)=r$ ......6 分

证（2）由（1）知，$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}=I_{11}+I_{22}+\cdots+I_{rr}$ ......8 分

其中 I_{ii} 为 (i,i) 元是 1 其余元素均为 0 的 $m\times n$ 矩阵，则 $r(I_{ii})=1\,(i=1,2,\cdots,r)$.

而 $A=P^{-1}(I_{11}+I_{22}+\cdots+I_{rr})Q^{-1}=P^{-1}I_{11}Q^{-1}+P^{-1}I_{22}Q^{-1}+\cdots+P^{-1}I_{rr}Q^{-1}$ ......9 分

且 $r(P^{-1}I_{ii}Q^{-1})=r(I_{ii})=1\,(i=1,2,\cdots,r)$.

故 A 可表示为 r 个秩为 1 的矩阵之和。 ......10 分

预祝大家取得理想成绩

QQ:2317746917